Chapitre 9

Analyse de variance
à un facteur

9.1 Introduction

L'analyse de variance à un facteur est une généralisation du test basé sur la loi de *Student* pour comparer deux moyennes : ici on compare k moyennes, $k \geq 2$. Nous illustrons le problème à l'aide des données suivantes [Source anonyme. Rapporté dans McNeil, D. R. (1977) *Interactive Data Analysis*. New York: Wiley.]

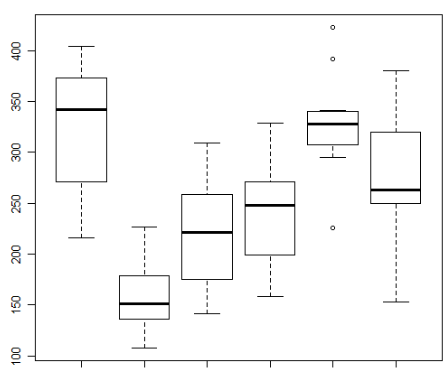
Une expérience est menée sur 71 poussins afin de comparer les effets sur la croissance de six régimes alimentaires. Les poussins ont été répartis au hasard, immédiatement après leur éclosion, en six groupes et leur poids après six semaines, a été noté. Le tableau 9.1 présente les résultats.

Tableau 9.1

Poids en grammes à 6 *semaines de* 71 *poussins*
répartis selon le type de grain consommé

	Type de grain					
	Caséine	Gourgane	Lin	Viande	Soya	Tournesol
	368 ; 390 379 ; 260 404 ; 318 352 ; 359 216 ; 222 283 ; 332	179 ;160 136 ; 227 217 ; 168 108 ; 124 143 ; 140	309 ; 229 181 ; 141 260 ; 203 148 ; 169 213 ; 257 244 ; 271	325 ; 257 303 ; 315 380 ; 153 263 ; 242 206 ; 344 258 ;	243 ; 230 248 ; 327 329 ; 250 193 ; 271 316 ; 267 199 ; 171 158 ; 248	423 ; 340 392 ; 339 341 ; 226 320 ; 295 334 ; 322 297 ; 318
n_i	12	10	12	11	14	12
$\bar{y}_i$	323,58	160,20	218,75	276,91	246,43	328,92
S_i	64,43	38,63	52,24	64,90	54,13	48,84

La question est de savoir si la croissance d'un poussin dépend du type de grain consommé. Une analyse graphique suggère une différence entre les grains :



À première vue, la caséine et le tournesol semblent particulièrement efficaces et la gourgane beaucoup moins. Ces différences sont-elles significatives ? L'hypothèse nulle est

> H_o : Il n'y a pas de différence entre les différents grains (quant à leur effet sur la croissance des poussins)

Nous devons formuler le modèle, pour pouvoir ensuite exprimer H_o en termes des paramètres du modèle.

9.2 Décomposition d'une somme de carrés

Les données prennent la forme suivante :

T_1	T_2	…	T_k	
y_{11}	y_{21}	…	y_{k1}	
y_{12}	y_{22}	…	y_{k2}	
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
y_{1n_1}	y_{2n_2}	…	y_{kn_k}	
$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	…	$\bar{y}_k$	$\bar{y}$

Dans le langage habituel, on dit que l'expérience comporte k groupes soumis à k *traitements* (k = 6 ici), chaque groupe recevant un traitement distinct. Une mesure Y est prise sur chaque individu. Soit

n_i : le nombre d'individus dans le groupe i, i =1, ..., k ;

$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ le nombre total d'individus ;

y_{ij} : la j^e observation (poids du j^e poussin) du *groupe i* ;

$\bar{y}_i$: la moyenne des mesures du groupe i.

Les échantillons présentent des différences entre les moyennes $\bar{y}_1$, … , $\bar{y}_k$. On dira de ces différences qu'elles sont *significatives* si on conclut qu'elles reflètent des différences d'efficacité réelles entre les différents grains — qu'elles ne sont pas le fruit du hasard. Bien qu'à première vue, certaines des différences semblent assez importantes, on ne peut pas vraiment en juger sans avoir une idée de la variabilité naturelle des poids. Il faudra mettre en rapport la dispersion des moyennes $\bar{y}_i$ avec une mesure de la variabilité normale des poids. Des indices de cette variabilité naturelle sont donnés par les écarts-types S_i des poids à l'intérieur des groupes, des indices que nous devrons combiner en une seule mesure.

Les moyennes $\bar{y}_i$ sont

$$\bar{y}_i = (1/n_i)\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \, , \qquad (9.2.1)$$

et la moyenne globale (des k groupes) est

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \bar{y}_i \qquad (9.2.2)$$

Ce sont les écarts entre les $\bar{y}_i$ et $\bar{y}$ qui nous diront si H_o devrait être rejetée ou non. Une mesure de la dispersion entre les $\bar{y}_i$ est donnée par la *somme des carrés expliquée*, désignée par SCE :

$$\textit{Somme des carrés expliquée} = \text{SCE} = \sum_{i=1}^{k} n_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y})^2 \, . \qquad (9.2.3)$$

On notera que les écarts au carré $(\bar{y}_i - \bar{y})^2$ sont *pondérés* par les tailles n_i : l'écart d'un groupe i par rapport à la moyenne globale a d'autant plus d'importance que le groupe est grand.

C'est une dispersion « expliquée » dans la mesure où elle peut être attribuée—en partie—à des différences dans l'effet des traitements.

Alors que la dispersion des données à l'intérieur d'un groupe ne peut être expliquée de cette manière puisque toutes les données d'un groupe ont été soumises à un même traitement. Cette dispersion interne est mesurée par la *somme des carrés résiduelle* SCR, définie par

$$\textit{Somme des carrés résiduelle} = \text{SCR} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2 \qquad (9.2.4)$$

Les sommes de carrés SCE et SCR constituent une décomposition de la *somme des carrés totale* SCT :

$$\text{SCT} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y})^2 \qquad (9.2.5)$$

C'est la dispersion de l'ensemble des données par rapport à la moyenne globale.

On peut montrer que

$$\text{SCT} = \text{SCE} + \text{SCR}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{k}n_i(\bar{y}_i-\bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2 \qquad (9.2.6)$$

Dans l'exemple, SCE est une mesure des différences *entre* les poids moyens des différents groupes, donc attribuable en partie aux effets différentiels des grains et SCR est la partie *résiduelle*, la dispersion entre les poids des poussins *d'un même groupe*, donc attribuable simplement à la variabilité naturelle des poids.

Le jugement concernant l'effet des traitements dépendra de l'importance relative de SCE par rapport à SCR.

9.3 Modèle et hypothèses

Nous supposons que les poids y_{ij} des poussins du groupe i sont des variables aléatoires de loi normale, de moyenne μ_i et de variance σ^2. On peut donc écrire

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij},\ j = 1, 2, \ldots, n_i \qquad (9.3.1)$$

où les ε_{ij} (les écarts des y_{ij} par rapport à leur espérance) sont indépendantes et

$$\varepsilon_{ij} \sim \mathcal{N}(0\,;\,\sigma^2) \qquad (9.3.2)$$

Les paramètres inconnus du modèle sont $\mu_1, \ldots, \mu_k$ et σ^2.

Remarque *Le paramètre σ^2 représente la dispersion entre les poids de poussins soumis à un même régime. Notre modèle suppose que la variance σ^2 des ε_{ij} est la même pour tous les groupes. Cette hypothèse n'est pas toujours réaliste, mais un modèle sans cette hypothèse est mathématiquement difficile à traiter.* ■

L'hypothèse nulle peut maintenant être exprimée en termes des paramètres du modèle :

$$\text{H}_o : \quad \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k \qquad (9.3.3)$$

L'alternative est la négation de H_o :

$$\text{H}_1 : \textit{au moins une des égalités } \mu_i = \mu_j\ (i \neq j) \textit{ n'est pas vérifiée} \qquad (9.3.4)$$

Lorsque les μ_i sont égaux, les moyennes $\bar{y}_i$ devraient être assez rapprochées les unes des autres et SCE devrait être petite. Donc nous devrions rejeter H_o si SCE est grand par rapport à SCR.

Le test pourrait donc être basé sur le rapport SCE/SCR. Mais une certaine normalisation est nécessaire si l'on veut rendre ces sommes sont plus comparables, car elles varient avec le nombre de termes qu'elles comprennent. On divisera donc chaque somme par le « nombre de degrés de liberté » pour obtenir une sorte de moyenne. Les *moyennes de carrés* sont définies comme ceci :

$$\text{MCE} = \frac{\text{SCE}}{k-1} \qquad \text{MCR} = \frac{\text{SCR}}{n-k} \tag{9.3.5}$$

La statistique de test est le rapport

$$F = \frac{\text{MCE}}{\text{MCR}} \tag{9.3.6}$$

Théorème 9.3.1 *Distribution des sommes de carrés*

Sous les hypothèses du modèle, soit (9.3.1) et (9.3.2),

a. $\frac{\text{SCR}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-k}$.

b. Sous H_o (9.3.3), $\frac{\text{SCE}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{k-1}$.

c. SCR et SCE sont indépendantes.

d. Par conséquent, sous H_o, la statistique F suit une loi de Fisher à k-1 et n-k degrés de liberté :

$$\text{Sous } H_o,\ F \sim \mathcal{F}_{k-1;\ n-k} \tag{9.3.7}$$

où $\mathcal{F}_{\nu_1;\nu_2}$ désigne une variable de loi de Fisher à ν_1 et ν_2 degrés de liberté.

On rejette H_o si

$$F > \mathcal{F}_{k-1;\ n-k;\alpha}. \tag{9.3.8}$$

$\mathcal{F}_{k-1;\ n-k;\alpha}$ désigne le point critique, soit le point tel que $P(\mathcal{F}_{k-1;n-k} > \mathcal{F}_{k-1;\ n-k;\alpha}) = \alpha$. La coutume est de présenter le tout sous la forme d'une *table d'analyse de variance.*

Remarque *L'énoncé* c) *du théorème* 9.3.1 *découle d'un théorème fondamental concernant un échantillon tiré d'une population normale, soit que la variance* S^2 *et la moyenne* $\bar{y}$ *sont des variables indépendantes. L'indépendance de* SCR *et* SCE *découle du fait que* SCR *est fonction des variances alors que SCE est fonction des moyennes.* ■

9.4 Table d'analyse de variance

La table d'analyse de variance présente de façon succincte les sommes de carrés, le nombre de degrés de liberté, et le rapport F. (Les logiciels statistiques ajoutent à cela la valeur p.) Nous ajoutons en outre l'espérance de chaque somme de carrés.

Source	Somme de carrés	Degrés de liberté	Moyenne des carrés	Espérances des moyennes des carrés
Expliquée	SCE	k-1	$\text{MCE} = \frac{\text{SCE}}{k-1}$	$\sigma^2 + \frac{\sum_i n_i(\mu_i - \bar{\mu})^2}{k-1}$
Résiduelle	SCR	n-k	$\text{MCR} = \frac{\text{SCR}}{n-k}$	σ^2
Total	SCT	n-1	$\text{MCT} = \frac{\text{SCT}}{n-1}$	$\sigma^2 + \frac{\sum_i n_i(\mu_i - \bar{\mu})^2}{n-1}$

Remarque MCT *est simplement la variance* S^2 *de toutes les données de l'échantillon, sans distinction de groupe.* ■

Les espérances ci-dessus justifient le choix du rapport F = MCE/MCR, puisque MCE et MCR ont la même espérance si et seulement si H_o est vraie; si H_o est fausse, MCE a tendance à être plus grand que MCR et le rapport F sera en conséquence grand. La distribution de F est connue sous H_o.

Exemple 9.4.1 *Calculs de l'exemple*

Dans l'exemple présenté au début du chapitre, nous avons k = 6, et

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{6} n_i \bar{y}_i}{n} = \frac{18553}{71} = 261{,}3099.$$

SCE = 231 129; SCR= $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{k}(n_i-1)S_i^2$ = 195 556.

MCE = SCE/5 = 46 226; MCR = SCR/(71-6) = 3009.

F = MCE/MCR = 15,36.

Le point critique à 5 % est $\mathcal{F}_{k\text{-}1;\ n\text{-}k;\alpha} = \mathcal{F}_{5;\ 65;0,05}$ = 2,35. Donc on rejette H_o pour conclure que les moyennes ne sont pas toutes égales. La valeur p, calculée à l'aide d'un logiciel, est p = $5{,}93642\times10^{-10}$.

Voici ce que produit le logiciel statistique R :

```
Analysis of Variance Table
Response: Poids
          Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
Grain      5 231129   46226  15.365 5.936e-10 ***
Residuals 65 195556    3009
```

La valeur p est habituellement présentée dans la table d'analyse de variance. ■

Remarque *La statistique F illustre un développement, caractéristique en statistique, qu'il est instructif de suivre ici. Chaque* $\bar{y}_i$ *est de variance* σ^2/n_i *et donc* $\frac{\bar{y}_i-\mu}{\sigma/\sqrt{n_i}} \sim \mathcal{N}(0\ ;\ 1)$, *où* μ *est la moyenne, commune sous* H_o. *Donc* $\frac{\bar{y}_i-\mu}{\sigma/\sqrt{n_i}}$, *ainsi que son carré,* $\frac{(\bar{y}_i-\mu)^2}{\sigma^2/n_i} = \frac{n_i(\bar{y}_i-\mu)^2}{\sigma^2}$ *est une mesure normalisée de l'écart entre* $\bar{y}_i$ *et* μ; *et la somme* $Q = \sum_{i=1}^{k}\frac{n_i(\bar{y}_i-\mu)^2}{\sigma^2}$ *est une mesure globale de l'écart entre les moyennes* $\bar{y}_i$ *et* μ. *Une valeur élevée de Q devrait mener au rejet de* H_o.

Puisque $\frac{\bar{y}_i-\mu}{\sigma/\sqrt{n_i}} \sim \mathcal{N}(0\ ;\ 1)$, $\frac{(\bar{y}_i-\mu)^2}{\sigma^2/n_i} = \frac{n_i(\bar{y}_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_1^2$ et $Q = \sum_{i=1}^{k}\frac{n_i(\bar{y}_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_k^2$.

Lorsqu'on remplace μ *par* $\bar{y}$, *on perd un degré de liberté et alors* $\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i(\bar{y}_i-\bar{y})^2}{\sigma^2} \sim \chi_{k-1}^2$. .

Si σ^2 *était connue, la statistique naturelle aurait été* $\dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{y}_i-\bar{y})^2/(k-1)}{\sigma^2} = \dfrac{\text{MCE}}{\sigma^2}$ et la réfion critique aurait été $\dfrac{\text{MCE}}{\sigma^2} > \chi^2_{k-1;\alpha}$. σ^2 *n'étant pas connue, on la remplace par* $\hat{\sigma}^2$ *et* $\dfrac{\text{MCE}}{\sigma^2}$ *par* $\dfrac{\text{MCE}}{\hat{\sigma}^2}$. *Cette quantité est précisément la statistique F.* ∎

Égalité d'un sous-ensemble des moyennes

Considérons un groupe de g moyennes parmi les k moyennes du modèle. Ce groupe sera identifié par l'ensemble G des indices. Il est possible de tester l'hypothèse d'égalité des g moyennes du groupe G :

$$\text{H}_o : \text{Toutes les moyennes du groupe } G \text{ sont égales} \tag{9.4.9}$$

La statistique de test est

$$F_G = \frac{\text{MCE}_G}{\text{MCR}} \text{, où } \text{MCE}_G = \frac{\sum_{i\in G} n_i(\bar{y}_i-\bar{y}_g)^2}{g-1}\ ,\ \bar{y}_G = \frac{\sum_{i\in G} n_i\bar{y}_i}{n_G} \text{ et } n_G = \sum_{i\in G} n_i \tag{9.4.10}$$

MCE_G est de même forme que MCE mais ne comprend que les moyennes des groupes concernés.

Le dénominateur MCR de la statistique ne change pas.

Sous H_o,

$$F_G \sim \mathcal{F}_{g-1;n-k}. \tag{9.4.11}$$

Additivité des statistiques F

On peut tester des hypothèses concernant des groupes disjoints de moyennes dans le cadre du même modèle d'analyse de variance.

Soit G_1 un sous-ensemble de g_1 moyennes et G_2 un deuxième groupe disjoint de g_2 moyennes, $g_1 + g_2 \le k$.

Considérons les hypothèses

- H_{o1} : Les moyennes du groupe G_1 sont toutes égales;
- H_{o2} : Les moyennes du groupe G_2 sont toutes égales;
- H_{o12}: Les moyennes du groupe G_1 sont toutes égales *et* les moyennes du groupe G_2 sont toutes égales (On désigne parfois H_{o12} par $\text{H}_{o1}\wedge\text{H}_{o2}$). Rejeter H_{o12}, c'est conclure qu'au moins l'une des hypothèses H_{o1} et H_{o2} est fausse.

Soit F_1 la statistique (9.4.10) pour tester H_{o1} et F_2 la statistique (9.4.10) pour tester H_{o2}. Alors une statistique appropriée pour tester H_{o12} est

$$F = \frac{(\text{SCE}_{G_1} + \text{SCE}_{G_2})/(g_1+g_2-2)}{\text{MCR}}$$

où

$$\text{SCE}_{G_1} = \sum_{i\in g1} n_i(\bar{y}_i-\bar{y}_{g1})^2 \quad \text{et } \text{SCE}_{G_2} = \sum_{i\in g2} n_i(\bar{y}_i-\bar{y}_{g2})^2$$

Ceci découle du fait que sous H_{o12},

$$\frac{\mathrm{SCE}_{G_1}}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i\in G_1} n_i(\bar{y}_i - \bar{y}_{G_1})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{g_1-1} \text{ et } \frac{\mathrm{SCE}_{G_2}}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i\in G_2} n_i(\bar{y}_i - \bar{y}_{G_2})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{g_2-1}$$

et les sommes de carrés SCE_{G_1} et SCE_{G_2} sont indépendantes.

Il s'ensuit que, sous H_{o12},

$$\mathrm{SCE}_{G_1} + \mathrm{SCE}_{G_2} \sim \chi^2_{\ell_1+\ell_2-2}$$

et, finalement,

$$F \sim \mathcal{F}(g_1 + g_2 - 2 \; ; n - k) \tag{9.4.12}$$

9.5 Estimation des paramètres

Estimation des moyennes

Les μ_i sont des paramètres qu'on peut également estimer. Les estimateurs les plus naturels sont les moyennes des groupes

$$\hat{\mu}_i = \bar{y}_i \tag{9.5.1}$$

En plus de leur simple attrait intuitif, ces estimateurs se justifient par le principe des moindres carrés, un principe qui choisit pour estimateurs les valeurs qui minimisent les écarts entre les observations et leur espérance. Spécifiquement, es $\hat{\mu}_i$ sont les valeurs de μ_i qui minimisent la somme des carrés

$$Q = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}[y_{ij} - \mathrm{E}(y_{ij})]^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \mu_i)^2 \tag{9.5.2}$$

On peut montrer que Q est minimisée lorsque $\mu_i = \bar{y}_i$. La somme des carrés résiduelle est la valeur de Q minimisée.

Estimation de σ^2

MCT n'est pas ici un estimateur sans biais de la variance σ^2 car les observations de l'échantillon n'ont pas toutes la même espérance. Elle le serait si H_o était vraie, si les μ_i étaient tous égaux. Par contre, chaque S_i^2 est un estimateur sans biais de σ^2. Pour estimer σ^2, on prend une moyenne des S_i^2 , pondérée par le nombre de degrés de liberté :

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i-1)S_i^2}{n-k} . \tag{9.5.3}$$

On constate de cet estimateur est exactement MCR :

$$\mathrm{MCR} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2}{n-k} = \sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i-1)S_i^2}{n-k} . \tag{9.5.4}$$

C'est un estimateur sans biais de σ^2.

9.6 Une interprétation de la statistique *F*

Nous pouvons considérer toute somme de carrés expliquée comme une différence de sommes de carrés résiduelle. La somme des carrés résiduelle est, par définition,

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\hat{\mu}_i)^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2 \qquad (9.6.1)$$

Mais la somme des carrés totale est *elle aussi* une somme de carrés résiduelle: c'est la somme des carrés résiduelle dans le modèle $y_{ij} = \mu + \varepsilon_{ij}$, le modèle selon lequel les moyennes des groupes sont toutes égales. Or ce modèle est précisément le modèle stipulé par l'hypothèse nulle. On peut donc écrire

$$\text{SCT} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\hat{\mu})^2 = \text{SCR}_o, \qquad (9.6.2)$$

où la notation SCR_o signifie qu'il s'agit d'une somme de carrés résiduelle sous un ***modèle réduit***, réduit par les contraintes imposées par H_o. La somme des carrés expliquée est la différence SCT - SCR où

$$\text{SCE} = \text{SCR}_O - \text{SCR} \qquad (9.6.3)$$

Si ν est le nombre de degrés de liberté de SCR et ν_o est le nombre de degrés de liberté de SCR_o, alors le rapport F devient

$$F = \frac{[\text{SCR}_O\text{-SCR}]/(\nu_O-\nu)}{\text{SCR}/\nu} \qquad (9.6.4)$$

Cette formule est assez générale : le rapport F est toujours de cette forme. La différence SCR_o - SCR, la somme des carrés expliquée, représente la *réduction* d'erreur due à l'introduction du modèle plus complexe. Le nombre de degrés de liberté du numérateur, $\nu_o - \nu$, est égal à la réduction du nombre de paramètres imposée par H_o.

9.7 Combinaisons linéaires des moyennes

Ayant rejeté l'hypothèse que toutes les moyennes sont égales, on voudra normalement procéder à certaines comparaisons deux à deux. Dans l'exemple considéré dans ce chapitre, supposons qu'on veuille tester l'hypothèse

$$H_o : \mu_1 = \mu_2 \qquad (9.7.1)$$

La statistique habituelle est $T = \dfrac{\bar{y}_1-\bar{y}_2}{\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$. Habituellement, dans un test d'égalité de deux moyennes, $\hat{\sigma}$ est une estimation commune basée sur les deux échantillons. Mais ici, l'estimation de σ exploite l'information contenue dans tous les échantillons, c'est-à-dire, $\hat{\sigma}$ est la racine carrée de MCR. Sous H_o,

$$T = \frac{\bar{y}_1-\bar{y}_2}{\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t_{n-k}. \qquad (9.7.2)$$

Exemple 9.7.1 *Test d'égalité de deux des moyennes*

Testons l'hypothèse $H_o : \mu_1 = \mu_2$. $\bar{y}_1 = 323{,}5833$; $\bar{y}_2 = 160{,}2$, $n_1 = 12$, $n_2 = 10$; $\hat{\sigma} = 54{,}85029$. $T = \dfrac{323{,}5833-160{,}2000}{54{,}85029\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{10}}} = 6{,}96$, ce qui est hautement significatif. On conclut avec confiance que la caséine est plus efficace que la gourgane. ■

Plus généralement, on peut estimer toute combinaison linéaire des μ_i et tester des hypothèses à propos de ces combinaisons linéaires. Soit $\varphi = \sum_i c_i\mu_i$ une combinaison linéaire avec coefficients fixes c_i. Un estimateur sans biais $\hat{\varphi}$ de φ est $\sum_i c_i\hat{\mu}_i = \sum_i c_i\bar{y}_i$. Sous les hypothèses du modèle, $\hat{\varphi}$ est normale, de moyenne φ et de variance $\sum \frac{c_i^2\sigma^2}{n_i} = \sigma^2 \sum \frac{c_i^2}{n_i}$. La variable

$$T = \frac{\hat{\varphi} - \varphi}{\hat{\sigma}\sqrt{\sum c_i^2 / n_i}} \sim t_{n-k} \tag{9.7.3}$$

Ceci nous permet de déterminer un intervalle de confiance pour φ et de tester des hypothèses du genre H_o: $\varphi = \varphi_o$. Ce qui inclut des hypothèses sur de la différence entre 2 des moyennes, ou encore sur certaines moyennes particulières.

Exemple 9.7.2 *Intervalle de confiance pour une fonction linéaire des moyennes*

Estimer le poids moyen φ des poussins à six semaines si 20 % sont nourries à la caséine ; 10 % à la gourgane ; 10 % au lin; 20 % à la farine de viande ; 30 % au soya ; et 10 % au tournesol. Déterminer un intervalle de confiance à 95 % pour φ.

Solution $\varphi = (0,2)\mu_1+(0,1)\mu_2+(0,1)\mu_3+(0,2)\mu_4+(0,3)\mu_5+(0,1)\mu_6$,

$\hat{\varphi} = (0,2)\bar{y}_1 + (0,1)\bar{y}_2 + (0,1)\bar{y}_3 + (0,2)\bar{y}_4 + (0,2)\bar{y}_5 + (0,1)\bar{y}_6 = 264,8137;$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\varphi}} = \hat{\sigma}\sqrt{\frac{(0,2)^2}{12} + \frac{(0,1)^2}{10} + \frac{(0,1)^2}{12} + \frac{(0,2)^2}{11} + \frac{(0,3)^2}{14} + \frac{(0,1)^2}{12}} = 6,952138.$$

Le point critique pour un intervalle de confiance à 95 % est 1.996. L'intervalle de confiance est donc

$$\hat{\varphi} - 1,996\,\hat{\sigma}_{\hat{\varphi}} \leq \varphi \leq \hat{\varphi} + 1,996\,\hat{\sigma}_{\hat{\varphi}},$$

$$251 \leq \varphi \leq 278.$$

■